# Untersuchungen

über das durch

## zwei cubisch verwandte Ebenen

erzeugte

# Strahlensystem.

Inaugural-Dissertation

zur

**Erlangung der Doktorwürde**

in der Philosophie

unter dem Präsidium des

**Herrn Professors Dr. Zittel.**

Der philosophischen Fakultät in München

vorgelegt von

**Ernst Schöner.**

MÜNCHEN 1887.

Buchdruckerei von Carl Gerber, München.

# Einleitung.

Nachdem Herr Stahl im 97. Band des Crelle'schen Journals und fast gleichzeitig Hirst in den Procedings of the London Math. Soc. vol. XIV (on Cremonian congruences) das Strahlensystem untersucht haben, welches durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier Ebenen erzeugt wird, zwischen welchen eine Verwandtschaft 2. Grads (Cremona'sche Transformation 2. Grads) besteht, bezweckt vorliegender Aufsatz, die analoge Aufgabe für zwei cubisch verwandte Ebenen zu behandeln. Wenn nun im § 1 dieser Abhandlung in Kürze die Erzeugungsweise einer geometrischen Verwandtschaft 3. Grads vorgetragen wird, so hat dies darin seinen Grund, dass dieselbe bis jetzt kaum bekannt ist und weil sie unmittelbar auf die Strahlenkomplexe hinführt, die durch das behandelte Strahlensystem gehen. Im § 10 wird eine andere Erzeugungsweise des Strahlensystems abgeleitet, nämlich durch 2 Ebenenbündel, die durch eine Beziehung 5. Grads mit einander verbunden sind. Für viele der in diesem Paragraph aufgestellten zahlreichen Sätze wurden die Beweise weniger ausführlich vorgetragen. Dies hat darin seinen Grund, weil das in diesem Aufsatze behandelte Strahlensystem 5. Ordnung und 3. Klasse reciprok ist zu einem Strahlensystem 3. Ordnung und 5. Klasse, das durch die Verbindungslinien homologer Punkte von 2 Ebenen entsteht, die in einer geometrischen Beziehung 5. Grads specieller Art (alle Kurven 5. Ordnung der einen Ebene, die den Geraden der andern entsprechen, berühren sich in 2 Punkten der Schnittlinie der beiden Ebenen) stehen. Da in

den vorausgehenden Paragraphen, die das Strahlensystem, als durch 2 Ebenen erzeugt, behandeln, die Beweise ausführlicher geführt werden und diese mutatis mutandis auch für die sich auf das reciproke Strahlensystem beziehenden Sätze gelten, insoferne es durch 2 Ebenen erzeugt wird, glaubte der Verfasser den Beweisen der Sätze des § 10 keine grössere Ausführlichkeit geben zu sollen.

Schliesslich sei es dem Verfasser gestattet, seinem verehrten Lehrer Herrn Universitätsprofessor Dr. Gustav Bauer für die Anregung zu dieser Arbeit an dieser Stelle den herzlichsten Dank auszusprechen.

München, den 9. März 1886.

**Ernst Schöner.**

# Inhaltsverzeichniss.


§ 1. Erzeugungsweise einer geometrischen Verwandtschaft 3. Grads.

§ 2. Construction des Strahlensystems $\Sigma$. Ordnung und Klasse von $\Sigma$.

§ 3. Die singulären Punkte und Ebenen von $\Sigma$.

§ 4. Complexe durch das Strahlensystem $\Sigma$.

§ 5. Die Brennfläche $\Phi$ von $\Sigma$. Ordnung und Klasse von $\Phi$.

§ 6. Das Strahlensystem S.

§ 7. Schnitte der Ebenen E und E′ mit der Brennfläche $\Phi$.

§ 8. Die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$. Schnitte von $\tau_1$ und $\tau_2$ mit der Brennfläche $\Phi$.

§ 9. Büschel von stationären Tangentialebenen der Brennfläche mit einer allgemeinen Ebene.

§ 10. Erzeugung von $\Sigma$ durch verwandte Ebenenbündel O und O′.

§ 11. Grad und Klasse des zur Brennfläche $\Phi$ gehörigen vollständigen Strahlensystems.

§ 12. Spezielle Fälle:

I. Strahlensystem $\Sigma$ 3. Ordnung und 3. Klasse.

II. „ $\Sigma$ 2. „ „ 3. „

III. „ $\Sigma$ 1. „ „ 2. „

§ 1.

## Erzeugungsweise einer geometrischen Verwandtschaft III. Grads.

Es sei ein in einer Ebene E liegender Strahlenbüschel O projektivisch zu einem Strahlenbüschel O′ in einer Ebene E′; ferner sei ein Strahlenbüschel $A_1$ von E projektivisch zu einem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten O′, $A'_2$, $A'_3$, $A'_4$ in E′. Dann können wir einem Punkt P von E, Schnittpunkt zweier Strahlen von O und $A_1$, den Punkt von E zuordnen, in welchem sich die diesen zweien Strahlen entsprechenden Gebilde von E′ ausser O′ noch schneiden. Durchläuft der Punkt P in E eine Gerade, so durchläuft sein entsprechender in E′ eine Kurve 3. Ordnung (Erzeugniss des Strahlenbüschels O′ und des ihm projektivischen Kegelschnittbüschels), welche durch die Punkte $A'_2$ $A'_3$ und $A'_4$ geht und O′ zum Doppelpunkt hat. Dem Strahl $A_1O$ entspricht einmal ein Strahl durch O′ und einmal ein Kegelschnitt des genannten Büschels; der Punkt $A'_1$, in welchem sich diese beiden Gebilde ausser O′ noch schneiden, entspricht also jedem Punkt von $A_1$ O. Daraus folgt, dass die genannte Kurve 3. Ordnung auch durch $A'_1$ geht.

Dem Punkt $A_1$ entspricht jeder Punkt von $O'A'_1$. In dem Kegelschnittbüschel in E′ kommen die 3 Geradenpaare $O'A'_2$, $A'_3A'_4$; $O'A'_3$, $A'_2A'_4$; $O'A'_4$, $A'_2A'_3$ als besondere Kegelschnitte vor. Die Geraden $O'A'_i$ (i = 2, 3, 4) gehören aber auch dem Strahlenbüschel O′ an, und folglich gibt es in E ausser $A_1$ noch 3 Punkte $A_i$ (i = 2, 3, 4), denen nicht ein einzelner Punkt, sondern die Punkte einer Geraden durch O′ entsprechen.

Den Geraden durch O entsprechen in der Verwandtschaft die Geraden durch O′. Durchläuft ein Punkt Q′ von E′ eine

Gerade g′, so durchläuft sein entsprechender in E eine Kurve 3. Ordnung; denn die Gerade g′ in E′ schneidet jeden Kegelschnitt des Büschels zweimal, jeden Strahl des Strahlenbüschels $A'_1$ einmal; also ist das der g′ entsprechende Gebilde in E das Erzeugnis der Strahleninvolution O mit dem projektivischen Büschel $A_1$. Die Kurve 3. Ordnung hat O zum Doppelpunkt und geht durch $A_1$, und da g′ die Gerade $O'A'_i$ $(i = 2, 3, 4)$ schneidet, so geht sie auch durch die $A_i$ $(i = 2, 3, 4)$.

Wir haben jetzt eine Beziehung zwischen den Ebenen E und E′ hergestellt, nach welcher jedem Punkt der einen Ebene im Allgemeinen ein und nur ein Punkt in der anderen Ebene entspricht, dagegen den Punkten einer Geraden der einen Ebene eine Kurve 3. Ordnung der andern. Diese Kurve geht durch 4 feste Punkte und hat überdiess einen festen Punkt zum Doppelpunkte. Dem Punkte O entspricht der Kegelschnitt $(O', A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$ dem Punkte $A_i$ die Gerade $O'A_i'$. Entsprechend für die andere Ebene*).

Aus naheliegenden Gründen wollen wir die Beziehung der Ebenen E und E′ eine geometrische Verwandtschaft 3. Grads nennen. Sie ist zwischen den beiden Ebenen durchaus wechselseitig.

Wir wollen nun in Kürze diese Entwicklungen noch in analytische Form bringen.

Die Coordinaten der Punkte von E seien durch x, die der Punkte von E′ durch y dargestellt. Der Punkt O habe die Coordinaten $x_1 = o$, $x_2 = o$; der Punkt $A_1$ $x_2 = o$, $x_3 = o$; der Punkt O′ die Coordinaten $y_1 = o$, $y_2 = o$. Die projektivischen Strahlenbüschel O und O′ werden dann dargestellt durch

$$x_1 + \lambda x_2 = o;\ y_1 + \lambda y_2 = o$$

Der Strahlenbüschel $A_1$ und sein projektivischer Kegelschnittbüschel werden dargestellt durch

$$x_2 + \mu x_3 = o;\ (Ay_1 + By_2) + \mu (Cy_1 + Dy_2) = o.$$

wo A, B, C, D linear in den y sind.

Irgend eine Gerade g von E habe die Gleichung

$$\text{I)}\quad x_1 + b x_2 + c x_3 = o,$$

*) Der Geraden $A_i A_k$ entspricht in der Verwandtschaft die Gerade $A'_l A'_m$. Die i, k, l, m sind sämmtlich von einander verschieden und die Zahlen 1, 2, 3, 4.

dann gehört zu jedem ihrer Punkte ein bestimmtes $\lambda$ und ein bestimmtes $\mu$, insofern nämlich derselbe Schnittpunkt zweier Strahlen des Büschels O und des Büschels $A_1$ ist. Die Werte b, c, $\lambda$ und $\mu$ sind durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & \lambda & o \\ 0 & 1 & \mu \end{vmatrix} = \lambda\mu - b\mu + c = 0$$

verbunden. Daraus folgt

$$\lambda = \frac{b\mu - c}{\mu}$$

Die Gleichung der der Geraden g entsprechenden Kurve 3. Ordnung in E′ wird durch Elimination von $\mu$ aus den beiden Gleichungen

$$y_1 + \frac{b\mu - c}{\mu} y_2 = o \text{ und } (Ay_1 + By_2) + \mu (Cy_1 + Dy_2) = o$$

erhalten. Das Resultat der Elimination ist:

II) $cy_2 (Cy_1 + Dy_2) + (y_1 + by_2) (Ay_1 + By_2) = o.$

Fassen wir nun die Grössen b und c als Paramenter der zweifach unendlich vielen Geraden von E auf, so stellt die Gleichung II) die zweifach unendlich vielen Kurven 3. Ordnung eines Netzes dar, die sämmtlich den Punkt $y_1 = y_2 = o$ zum Doppelpunkt haben, sowie durch die 3 noch übrigen Grundpunkte des Kegelschnittbüschels $(Ay_1 + By_2) + \mu (Cy_1 + Dy_2) = o$ gehen; ebenso gehen sie alle durch den 2. Schnittpunkt von $Ay_1 + By_2 = 0$ mit $y_2 = 0$. ($Ay_1 + By_2 = o$ ist offenbar die Gleichung des Kegelschnitts der singulären Punkte in E′).

§ 2.

## Construction des Strahlensystems $\Sigma$. Ordnung und Klasse von $\Sigma$.

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte von E und E′ bilden ein Strahlensystem $\Sigma$. Eine beliebige Ebene $\varepsilon$ schneidet die E nach einer Geraden g und die E′ nach einer Geraden g′. g′ hat mit derder g entsprechenden Curve 3. Ordnung k′ drei Punkte gemein. Die Verbindungslinien dieser 3 Punkte mit ihren homologen auf g sind die einzigen in $\varepsilon$ liegenden

Strahlen von $\Sigma$. Das Strahlensystem $\Sigma$ ist also von der 3. Klasse.

Projicieren wir nun aus einem beliebigen Punkte P das eine ebene System, etwa E, in die Ebene des andern, hier also in die Ebene E′, so liegen in E′ 2 cubisch verwandte ebene Systeme auf einander. Die Projektion des Strahlenbüschels O erzeugt mit dem Strahlenbüschel O′ einen Kegelschnitt $C^2$; die Projektion des Strahlenbüschels $A_1$ erzeugt mit dem Kegelschnittbüschel eine Kurve 3. Ordnung $C^3$. Die Kurven $C^2$ und $C^3$ haben ausser O′ noch 5 Punkte gemein; folglich gehen durch P 5 Strahlen von $\Sigma$.

Das Strahlensystem $\Sigma$ ist also von der 5. Ordnung. Zu diesem letzteren Resultat gelangt man auch in folgender Weise:

Einem Strahlenbüschel R des einen der in einander liegenden ebenen Systeme entspricht ein Büschel von Kurven 3. Ordnung im anderen ebenen System. Durch die Schnittpunkte entsprechender Elemente in beiden Gebilden wird eine Kurve 4. Ordnung $C^4_R$ erzeugt. Einem zweiten Strahlenbüschel T des ersten ebenen Systems entspricht ebenfalls ein Büschel von Kurven 3. Ordnung, die in ähnlicher Weise eine Kurve 4. Ordnung $C^4_T$ erzeugen.

$C^4_R$ und $C^4_T$ haben den Doppelpunkt des zweitgenannten ebenen Systems zum Doppelpunkt, gehen durch die 4 einfachen Hauptpunkte dieses Systems, sowie durch die 3 Punkte, wo die Projektion der Geraden RT ihre entsprechende Kurve 3. Ordnung trifft. Die genannten 8 Punkte vertreten 11 Durchschnittspunkte von $C^4_R$ und $C^4_T$. Die übrigen 5 sind von der Art, dass in ihnen entsprechende Punkte der beiden Ebenen sich decken. Daraus folgt, wie oben, dass $\Sigma$ von der 5. Ordnung ist.

## § 3.

## Die singulären Puncte und Ebenen von $\Sigma$.

Da den Punkten O und O′ die Punkte des Kegelschnitts der singulären Punkte in der Ebene E resp. E′ entsprechen, so hat $\Sigma$ 2 Strahlenkegel 2 Grads. Den Punkten $A_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) und $A'_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) entspricht in der Verwandtschaft die Gerade $O'A'_i$ resp. $O\,A_k$. Es treten also in

$\Sigma$ 8 singuläre Ebenen mit Strahlenbüscheln ersten Grads auf.

In der Verwandtschaft entsprechen den Strahlen des Strahlenbüschels O in E die Strahlen des Strahlenbüschels O′ von E′. Da es im Allgemeinen zweimal vorkommt, dass ein Strahl durch O seinen entsprechenden durch O′ schneidet, so gibt es zwei Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$ durch O O′, die Strahlenbüschel 2. Grads von $\Sigma$ enthalten.

Der Schnittlinie m von E und E′, als der E′ angehörig, entspricht in E eine Kurve 3. Ordnung. Die Verbindungslinien homologer Punkte dieser beiden Gebilde bilden einen Strahlenbüschel 4. Ordnung mit m als 3fachen Strahl, dem einzigen mehrfachen Strahl von $\Sigma$. Die umhüllte Kurve ist von der 6. Ordnung ($K^6$) und hat m zur 3fachen Tangente. Ebenso liegt in E′ eine Curve 6. Ordnung ($K'^6$) erzeugt von den Verbindungslinien der Punkte von m, diese als Gerade von E aufgefasst, mit ihren homologen Punkten auf der der m entsprechenden Kurve 3. Ordnung. Die 3 Schnittpunkte dieser Kurve mit m sind die 3 Berührpunkte von $K^6$ mit m. Analoges gilt für die Kurve $K'^6$.

## § 4.

## Strahlencomplexe durch das Strahlensystem $\Sigma$.

Projiciert man aus einem beliebigem Punkt P den Strahlenbüschel O von E in die Ebene E′, so erzeugt er mit seinem entsprechenden einen Kegelschnitt, auf welchem die Schnittpunkte der durch P gehenden 5 Strahlen von $\Sigma$ mit E′ liegen. (Vergl. § 2). Der Kegelschnitt geht durch die Punkte O′, $T_1$ und $T_2$, Schnittpunkte der Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$ mit m, und ist der Durchschnitt der Ebene E′ mit dem durch P gehenden Complexkegel eines Strahlencomplexes 2. Grads. Der Complexkegel enthält die 4 Strahlen PO, PO′, $PT_1$, $PT_2$.

Irgend eine Ebene $\varepsilon$ schneidet die Ebene E nach einer Geraden $\gamma$, die E′ nach einer Geraden $\gamma'$. In $\varepsilon$ liegen 3 Strahlen $s_1$, $s_2$, $s_3$ von $\Sigma$. Die Strahlenbüschel O und O′ schneiden auf $\gamma$ resp. $\gamma'$ projektivische Punktreihen aus. Die Verbindungs-

linien entsprechender Punkte derselben sind Tangenten eines Kegelschnitts $k^2$. Die Strahlen $s_1$, $s_2$, $s_3$, sowie die Schnittlinien der Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$ mit $\varepsilon$, ferner die Geraden $\gamma$ und $\gamma'$ sind Tangenten des Kegelschnitts $k^2$.

Durch $\Sigma$ geht also ein Strahlencomplex 2. Grads, und zwar ein Reye'scher, mit dem Haupttetraëder E, E′, $\tau_1$, $\tau_2$ und den Hauptpunkten O, O′, $T_1$, $T_2$.

Es ist dies der einzige Strahlencomplex 2. Grads durch $\Sigma$. Zugleich ergibt sich hieraus, dass die 3 Strahlen von $\Sigma$, die durch einen Punkt der Ebene $\tau_1$ oder $\tau_2$ gehen, (abgesehen von den 2 Strahlen des Strahlenbüschels 2. Grads in $\tau_1$ resp. $\tau_2$ durch diesen Punkt) in einer Ebene durch $T_2$ resp. $T_1$ liegen. (Vergl. Reye, Geometrie der Lage, 2. Teil pag. 130).

Projiciert man den Strahlenbüschel $A_1$ von E von P aus in die Ebene E′, so erzeugt er mit seinem projektivischen Kegelschnittbüschel eine Kurve 3. Ordnung, die durch O′, $A'_i$ (i = 2, 3, 4), sowie durch 3 feste Punkte auf m geht. Diese Kurve 3. Ordnung hat die Schnittpunkte der durch P gehenden 5 Strahlen von $\Sigma$ mit E′ auf sich liegen und ist der Durchschnitt von E′ mit dem durch P gehenden Complexkegel eines Strahlenkomplexes 3. Grads, in dem unser Strahlensystem $\Sigma$ enthalten ist.

Der Complexkegel eines Punktes P von E′ zerfällt in den doppelt zu zählenden Strahlenbüschel 1. Grads in E′ durch diesen Punkt P und einen weiteren Strahlenbüschel 1. Grads. Derselbe liegt in der Ebene, welche den Punkt P mit dem Strahl durch $A_1$ verbindet, welcher dem durch P gehenden Kegelschnitt des Büschels entspricht.

Der Complexkegel eines Punktes P von E zerfällt in den Strahlenbüschel P in E und einen Strahlenkegel 2. Grads. Derselbe schneidet die E′ nach dem Kegelschnitt, welcher dem Strahl $A_1P$ im Kegelschnittbüschel entspricht. Die Complexkegel 2. Grads aller Punkte der Geraden $PA_1$ schneiden also die E′ nach demselben Kegelschnitt.

Für diesen speziellen Complex 3. Grads ist also jede Gerade von E ein einfacher, jede Gerade von E′ ein Doppelstrahl.

Da die geometrische Verwandtschaft 3. Grads auf 4 verschiedene Arten erzeugt werden kann, je nachdem einer der 4 Punkte $A_i$ die Rolle von $A_1$ übernimmt, und da jeder dieser 4 Erzeugungsarten 2 Strahlencomplexe 3. Grads entsprechen, je nachdem man die Ebene E in die Ebene E′ oder die Ebene E′ in die Ebene E projiciert, so folgt, dass es 8 verschiedene Strahlencomplexe 3. Grads gibt, in denen $\Sigma$ enthalten ist.

Die 2 in einer Ebene $\varepsilon$ liegenden Complexstrahlenbüschel der Complexe 2. und 3. Grads, welche sich nach dem Strahlensystem $\Sigma$ schneiden, haben offenbar ausser den Schnittlinien von $\varepsilon$ mit E und E′ nur mehr 3 Strahlen gemein, entsprechend der Klasse von $\Phi$. Die eine dieser Schnittlinien zählt für beide Strahlenbüschel als einfacher Strahl, die andere zählt für den Strahlenbüschel 2. Grads einfach, für den 3. Grads doppelt.

## § 5.

## Die Brennfläche $\Phi$ von $\Sigma$. Ordnung und Klasse von $\Phi$.

Die Brennfläche eines Strahlensystems ist der Ort der Punkte, für welche 2 durch sie gehende Strahlen zusammenfallen und die Einhüllende aller Ebenen, welche zwei zusammenfallende Strahlen enthalten. Die Strahlen des Strahlensystems sind Doppeltangenten der Brennfläche.

Einem Strahlenbüschel M von E entspricht ein Büschel M′ von Kurven 3. Ordnung und 4. Classe in E′. Lassen wir nun einem Strahl s des Büschels M die Tangenten t entsprechen, die durch einen beliebigen Punkt N′ in E′ an die Kurve gehen, die dem s entspricht, so sind die Büschel s und t derart aufeinander bezogen, dass jedem Strahl s 4 Strahlen t und jedem Strahl t 4 Strahlen s entsprechen; denn ein Strahl t berührt 4 Kurven des Büschels. Es kommt desshalb im Allgemeinen 8mal vor, dass eine Ebene des Ebenenbüschels MN′ die Brennfläche $\Phi$ berührt. Die Brennfläche ist also von der 8. Klasse.

Zur Bestimmung der Ordnung von $\Phi$ diene Folgendes: Projicieren wir die beiden beliebigen Strahlenbüschel R und T

von E aus einem Punkt P in die Ebene E′ als Strahlenbüschel $R_p$ und $T_p$, so erzeugen diese mit den den Strahlenbüscheln R und T entsprechenden Kurvenbüscheln die Kurven 4. Ordnung $C_r^{4'}$ bezw. $C_t^{4'}$. Die 5 durch P gehenden Strahlen von P schneiden E′ in Schnittpunkten von $C_r^{4'}$ und $C_t^4$. Halten wir nun die Punkte R und T fest und lassen P eine beliebige Gerade g durchlaufen, so beschreiben die Punkte $R_p$ und $T_p$ die Geraden $g'_r$ resp. $g'_t$. Durch den Punkt P sind die beiden Punktreihen $R_p$ und $T_p$ projektivisch auf einander bezogen. Da $g_r'$ und $g_t'$ im Schnittpunkte L′ von g mit E′ sich schneiden müssen und da dieser Punkt in beiden Punktreihen sich selbst entspricht, so liegen die beiden Punktreihen sogar perspektivisch, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen und denselben Punkt H, Schnittpunkt der festen Geraden RT mit m. Bei der Bewegung von P beschreibt die $C_r^{4'}$ einen Büschel von Kurven. Zunächst nämlich bemerken wir, dass durch jeden Punkt M′ von E′ nur eine $C_r^{4'}$ geht. Man erhält diese in folgender Weise: Durch M′ geht eine einzige Kurve 3. Ordnung des Büschels R′. Dieser entspricht ein Strahl $\mu$ durch R, der die m in X schneiden möge. Die Gerade X M′ schneidet die $g_r'$ in demjenigen Punkte $R_p$, der der Mittelpunkt desjenigen Strahlenbüschels ist, welcher mit dem Kurvenbüschel R′ die einzige durch M′ gehende Kurve $C_r^{4'}$ erzeugt. Da die Kurven des Büschel R′ sämmtlich durch R′ und $A'_i$ (i = 1, 2, 3, 4) gehen und O′ zum Doppelpunkt haben, so gilt dies auch für jede $C_r^{4'}$. Ferner gehen die Kurven $C^{4'}$ sämmtlich durch die 4 Punkte, welche die durch R gehenden 4 Strahlen des in E liegenden Strahlenbüschels 4. Ordnung von $\Sigma$ auf m ausschneiden. Die Projektion des Strahls $g_r$ bleibt für alle Lagen von P die nämliche, nämlich $g_r'$. Es gehen daher auch alle $C_r^{4'}$ durch die 3 Punkte $G_r'$, in denen die $g_r'$ die der $g_r$ entsprechende Kurve 3. Ordnung trifft. Mit Einschluss des Punktes O′ haben wir also jetzt 13 Basispunkte, welche, da der Punkt O′ vierfach zu zählen ist, die 16 Grundpunkte des Büschels $C_r^{4'}$ vertreten.

Ebenso beschreiben bei der Bewegung des Punktes P die Kurven $C_t^{4'}$ einen Büschel, der den Punkt O′ zum 4fach zählenden, die Punkte T′, $A'_i$ (i = 1, 2, 3, 4), die 3 Punkte

$G_t'$ auf $g'_t$, wo der Strahl $g^{t'}$ die der $g^t$ entsprechende Kurve 3. Ordnung schneidet, dann die 4 Punkte auf m, welche die 4 durch T gehenden Strahlen des Strahlenbüschels 4. Ordnung von $\Sigma$ in E auf m ausschneiden, zu einfach zählenden Grundpunkten hat.

Durch die projektivische Beziehung von $R_p$ und $T_p$ sind auch die Kurven $C_r^{4'}$ und $C_t^{4'}$ projektivisch auf einander bezogen. Entsprechende Kurven in beiden Büscheln erzeugen durch ihre Schnittpunkte eine Kurve 8. Ordnung, die in O' einen 4fachen Punkt, in $A'_i$ (i = 1, 2, 3, 4) Doppelpunkte und die 3 Punkte $G'_r$ sowie die 3 Punkte $G_t'$ zu einfachen Punkten hat; ebenso hat sie die je 4 auf m liegenden Grundpunkte der Büschel $C_r^{4'}$ und $C_t^{4'}$, sowie die Punkte R' und T' zu einfachen Punkten. Die Kurve 8. Ordnung zerfällt aber in eine Kurve 3., eine solche 4. Ordnung und eine Gerade. Rückt nämlich der Punkt P in den Schnittpunkt N von g mit E, so zerfällt die $C_r^{4'}$ in die Gerade m und in die der $g_r$ in der Verwandtschaft entsprechende Kurve 3. Ordnung und die $C_t^{4'}$ zerfällt ebenso in die Gerade m und in die der $g_t$ entsprechende Kurve 3. Ordnung. Diese zerfallenen Kurven $C_r^{4'}$ und $C_t^{4'}$ sind offenbar entsprechende Kurven in den beiden Büscheln, und folglich trennt sich die Gerade m von der Kurve 8. Ordnung ab. Ohne Schwierigkeit erkennt man auch, dass sich die der Geraden R T in der Verwandtschaft entsprechende Kurve 3. Ordnung ebenfalls von der Kurve 8. Ordnung lostrennt, so dass die Restkurve eine Kurve 4. Ordnung $R^{4'}$ ist. Diese muss O' zum Doppelpunkt und die Punkte $A'_i$ zu einfachen Punkten haben; ferner geht $R^{4'}$ durch die 3 Punkte $G'_r$, sowie durch die 3 Punkte $G'_t$ und durch den Punkt L'.

Jede $C_r^{4'}$ oder $C_t^{4'}$ hat O' zum Doppelpunkt, die Punkte $A'_i$ sowie die 3 Punkte $G'_r$ resp. $G'_t$ zu einfachen Punkten und da diese 11 Durchschnittspunkte mit $R^{4'}$ vertreten, so hat irgend eine $C_r^{4'}$ oder $C_t^{4'}$ noch 5 variable Schnittpunkte mit $R^{4'}$, und dies sind die Punkte, wo die durch den entsprechenden Punkt P gehenden 5 Strahlen von $\Sigma$ die Ebene E' schneiden.

Berührt nun eine $C_r^{4'}$ oder $C_t^{4'}$ die $R^{4'}$, so gehen durch den entsprechenden Punkt P auf g zwei zusammenfallende Strahlen und folglich liegt er auf der Brennfläche $\Phi$. Um also

über die Ordnung von $\Phi$ zu entscheiden, haben wir nur zu untersuchen, wie viele Kurven des Büschels $C_\tau^{4'}$ oder $C_t^{4'}$ die $R^{4'}$ berühren. Da die $R^{4'}$ nur den einzigen Doppelpunkt $O'$ hat, so ist sie vom Geschlechte $p = 2$ und die Anzahl der fraglichen Kurven ist desshalb 12. (Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, pag. 459 und 460). In unserem Falle ist für die die gesuchte Anzahl ausdrückende Formel $M = 5$, $p = 2$, $r$ (Anzahl der Rückkehrpunkte von $R^{4'}$) $= 0$). Die Brennfläche $\Phi$ ist desshalb von der 12. Ordnung. Eine andere Art für die Ermittlung der Ordnungszahl von $\Phi$ werden wir in § 10 kennen lernen.

## § 6.

## Das Strahlensystem S.

Dem Strahlenbüschel O entspricht in der Verwandtschaft der Strahlenbüschel O:. Durch die Verbindungslinien homologer Punkte auf 2 entsprechenden Strahlen wird eine Regelfläche 2. Ordnung erzeugt. Das Strahlensystem $\Sigma$ wird also auch erzeugt durch die eine Regelschaar $R_\Sigma$ dieses einfach unendlichen Systems von Regelflächen 2. Ordnung $F^2$. Entsprechend der Ordnung und der Klasse von $\Sigma$ liegt irgend ein Punkt auf 5 Flächen $F^2$, und irgend eine Ebene berührt 3 dieser Flächen. Da durch einen Punkt genau so viele Gerade der anderen Regelschaar $R_S$ der Flächen $F^2$ gehen müssen als der Regelschaar $R_\Sigma$ und in irgend einer Ebene von der einen Regelschaar so viele Gerade liegen müssen als von der anderen Regelschaar, so folgt:

Die Regelschaaren $R_S$ der Flächen $F^2$ bilden ebenfalls ein Strahlensystem 5. Ordnung und 3. Klasse S, das dieselbe Brennfläche, dieselben singulären Punkte und Ebenen, wie $\Sigma$ hat, im Uebrigen aber mit $\Sigma$ ungleichartig ist.

Die Ebenen E und E′ enthalten von S den Strahlenbüschel O resp. O′. Die Strahlenbüschel 2. Ordnung in $\tau_1$ und $\tau_2$ hat S mit $\Sigma$ gemein. Die Ebene $A_i\ A_i'\ O$ enthält den Strahlenbüschel $A_i$, die Ebene $A_i\ A_i'\ O'$ enthält den Strahlenbüschel $A_i'$.

§ 7.

## Schnitte der Ebenen $E$ und $E'$ mit der Brennfläche $\Phi$.

Die Ebene E berührt die Brennfläche nach derjenigen Kurve 3. Ordnung $R^3$, die der m (Schnittlinie von E und E′) als einer Geraden von E′ in der Verwandtschaft entspricht. Dies folgt daraus, weil die Punkte von $R^3$ die einen Brennpunkte der Strahlen des Strahlenbüschels 4. Ordnung von $\Sigma$ sind. Ausserdem schneidet E die $\Phi$ noch nach derjenigen Kurve 6. Ordnung $K^6$, die von den Strahlen des genannten Strahlenbüschels umhüllt wird. (Vergl. § 3). $R^3$ und $K^6$ sind beide von der 4. Klasse und haben desshalb 16 gemeinschaftliche Tangenten. Sei t eine derselben und a und b ihre Berührpunkte mit $K^6$ bezw. $R^3$. Nun haben wir zwei Fälle zu unterscheiden: t kann die Verbindungslinie des Punkts b mit seinem entsprechenden auf m sein, oder sie kann die Verbindungslinie desjenigen Punktes sein, in welchem sie die $R^3$ noch schneidet, mit dem entsprechenden auf m. Betrachten wir zunächst den ersteren Fall. t ist dann als doppelt zu zählender Strahl für die durch b gehenden Strahlen des Strahlenbüschels 4. Ordnung von $\Sigma$ zu rechnen. Der Punkt b liegt also auch auf $K^6$ und t muss die Tangente von $K^6$ in b sein. Da $K^6$ ausser der 3 fachen Tangente m keine mehrfache Tangenten mehr haben kann, so müssen die Punkte a und b identisch sein, und $K^6$ und $R^3$ berühren sich in diesem Punkte. — Nun gibt es 5 Tangenten von $R^3$, welche zugleich Verbindungslinien ihres Berührpunktes mit seinem entsprechenden auf m sind. Denn sei b b′ ein Strahl von $\Sigma$ (b′ der dem Punkt b entsprechende auf m) und b b′ die Tangente von $R^3$ in b (b″ Schnittpunkt dieser Tangente mit m), und lassen wir die Punkte b′ und b″ sich entsprechen, so entspricht einem Punkt b′ ein einziger Punkt b″ und einem Punkt b″ entsprechen 4 Punkte b′. Also gibt es 5 Tangenten von $R^3$, welche zugleich Verbindungslinien ihres Berührpunktes b mit seinem entsprechenden auf m sind. **Die Kurven $K^6$ und $R^3$ berühren sich also in 5 Punkten.**

Die Tangenten in diesen 5 Berührpunkten von $R^3$ und $K^6$ vertreten 10 gemeinschaftliche Tangenten. Es gibt also noch 6 gemeinschaftliche Tangenten mit verschiedenen Berührpunkten für $K^6$ und $R^3$ Letztere Behauptung lässt sich auch direkt nachweisen. Einem Punkt b′ von m entspricht ein Punkt b von $R^3$. Von b aus gehen an $R^3$ ausser der Tangente in b selbst noch 2 Tangenten. Diese schneiden die m in 2 Punkten p. Einem Punkte b′ von m entsprechen auf diese Weise 2 Punkte p. Von einem Punkt p aus gehen aber 4 Tangenten an $R^3$, deren jede die $R^3$ noch in einem Punkte b schneidet. Also entsprechen einem Punkte p 4 Punkte b′ auf m, und daraus folgt sogleich die Richtigkeit der Behauptung.

Gemäss den Plücker'schen Formeln hat $K^6$ 6 Rückkehrpunkte, 4 Doppelpunkte, keinen Wendepunkt und ausser m keine mehrfache Tangente.

Die Rückkehrkurve von $\Phi$ (Ort der Punkte, für welche 3 der 5 Strahlen von $\Sigma$ in einen coincidieren) oskuliert die E in den 5 Berührpunkten von $R^3$ und $K^6$ und geht durch die 6 Rückkehrpunkte von $K^6$; ferner hat sie, wie wir später (§ 10) sehen werden, den Punkt O zum 3fachen Punkt. $R^3$ und $K^6$ scheiden sich noch in 8 Punkten; in jedem derselben berührt E die Doppelkurve von $\Phi$ (Ort der Punkte, für welche 2 doppelt zu zählende Strahlen von $\Sigma$ gehen), ausserdem geht sie noch durch die 4 Doppelpunkte von $K^6$.

Analoges gilt für die Schnittkurve der Ebene E′ mit der Brennfläche $\Phi$.

§ 8.

## Die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$; Schnitte von $\tau_1$ und $\tau_2$ mit der Brennfläche $\Phi$.

Die Strahlen von $\Sigma$, welche eine beliebige Gerade g schneiden, bilden eine Regelfläche 8. Grads mit g als fünffacher Leitgeraden. Liegt nun g in der Ebene $\tau_1$ und geht durch $T_1$, so zerfällt die Regelfläche 8. Grads in den Strahlenbüschel 2. Grads von $\Sigma$ in $\tau_1$ und eine Regelfläche 6. Grads $R_6$. $R_6$ schneidet auf E ausser der 3fach zu zählenden Geraden m

eine Kurve 3. Grads $C^3$ aus, die durch die Punkte O und $A_i$ (i = 1, 2, 3, 4) geht und ebenso durch die 3 Punkte auf m, in welchen die der m entsprechende Kurve $R^3$ diese Gerade schneidet. Eine Gerade durch O schneidet die $C^3$ ausser in O noch in 2 Punkten. Denn sei l ein Strahl durch O in E, dem in der Verwandtschaft der Strahl l′ durch O′ in E′ entspricht, so schneidet die g die von l und l′ erzeugte Regelfläche $F^2$ (vergl. § 6) in 2 Punkten. Ist l Tangente an den Kegelschnitt der singulären Punkte von $\Sigma$, so entspricht ihr in der Verwandtschaft die Tangente l′ an den Kegelschnitt der singulären Punkte in E′. Die g schneidet die von l und l′ erzeugte Regelfläche $F^2$ ausser in einem Punkt von OO′ nur mehr in einem Punkt, und folglich ist l Tangente in O von $C^3$. Daraus folgt:

Die Kurven $C^3$ in E, die von den Regelflächen 6. Grads von $\Sigma$, deren Leitgeraden Strahlen des Strahlenbüschels $T_1$ in $\tau_1$ sind, auf E ausgeschnitten werden, bilden einen Büschel von Kurven $C^3$, die durch die Punkte O, $A_i$ (i = 1, 2, 3, 4) sowie durch 3 feste Punkte auf m gehen und den Kegelschnitt der singulären Punkte in O berühren. Unter diesen $C^3$ befindet sich auch der Kegelschnitt der singulären Punkte mit m, als dem Strahl $T_1O'$ entsprechend, sowie die Kurve $R^3$, als dem Strahl $T_1O$ entsprechend, endlich die Kurve des Büschels, die den gemeinsamen Berührpunkt zum Doppelpunkt hat.

Durch einen Punkt P von $\tau_1$ gehen ausser den beiden in $\tau_1$ liegenden Strahlen noch 3 in einer Ebene $\varepsilon$ durch $T_2$ liegende Strahlen. (Vergl. § 4). Dieselben treffen die E in den 3 Schnittpunkten von $\varepsilon$ mit der der $T_1P$ entsprechenden Kurve $C^3$. Wir wollen die Punkte von $\tau_1$ und $\tau_2$ Trippelpunkte nennen, weil drei durch sie gehende Strahlen von $\Sigma$ in einer Ebene liegen, die Ebenen der Ebenenbündel $T_1$ und $T_2$ wollen wir Trippelebenen nennen, weil die 3 in ihnen liegenden Strahlen von $\Sigma$ durch einen Punkt gehen. Die Ebenen des Ebenenbüschels $T_2P$ schneiden auf $\tau_1$ einen Strahlenbüschel aus. Auf jedem Strahl dieses Büschels liegt ein einziger Punkt, der zu einer Ebene des Büschels Trippelpunkt ist; der Punkt P ist aber selbst Trippelpunkt einer Ebene des Büschels.

Daraus folgt, dass die Trippelpunkte der Ebenen des Ebenenbüschels $T_2 P$ auf einem Kegelschnitt liegen, der durch den Schnittpunkt der Axe des Ebenenbüschels mit $\tau_1$ geht. Der Trippelpunkt der Ebene $T_2 P T_1$ ist der Punkt $T_1$. Den Ebenen $T_2 PO$ und $T_2 PO'$ entsprechen die resp. Punkte O und O'. Der Kegelschnitt geht also durch die 3 festen Punkte $T_1$, O und O'.

Irgend eine Gerade $\lambda$ in $\tau_1$ schneidet den Kegelschnitt in 2 Punkten. Daraus folgt, dass durch $T_2 P$ 2 Ebenen gehen, denen Punkte auf g als Trippelpunkte zugehören. Den Punkten einer Punktreihe in $\tau_1$ entsprechen also die Tangentialebenen einer Kegelfläche 2. Klasse durch $T_2$.

Den Punkten O und O' als Punkten von $\tau_1$ entsprechen alle Ebenen des Büschels $T_2 O$ resp. $T_2 O'$. Dem Punkte $T_1$ entspricht jede Ebene des Büschels $T_2 T_1$. Den Punkten von $T_1 O$, $T_1 O'$, $OO'$, entsprechen die Ebenen $T_2 T_1 O$, resp. $T_2 T_1 O'$ resp. $T_2 OO'$. Alle Kegelflächen 2. Klasse berühren also diese 3 Ebenen.

Aus dem Allen folgt: Zwischen den Punkten der Ebene $\tau_1$ ($\tau_2$) und den Ebenen des Ebenenbündels $T_2$ ($T_1$) als Trippelebenen der ersteren, besteht eine quadratische Verwandtschaft (Reciproke Beziehung). Die Punkte liegen in ihren entsprechenden Ebenen und die Ebenen gehen durch ihre entsprechenden Punkte.

An irgend eine Kurve $C^3$ des Kurvenbüschels in E gehen von $T_2$ aus 6 Tangenten, und folglich liegen auf der entsprechenden Geraden g durch $T_1$ in $\tau_1$ 6 Punkte, für welche 2 Strahlen von $\Sigma$ zusammenfallen. Der Ort dieser Punkte ist also eine Kurve 6. Ordnung $C^6$, welche die $\tau_1$ aus der Brennfläche ausschneidet.

Eine $C^3$ schneidet die $T_1 O$ ausser in O noch in 2 Punkten, also gibt es auf der entsprechenden g 2 Punkte R, für welche einer der 3 im Allgemeinen nicht in $\tau_1$ liegenden Strahlen in die $\tau_1$ fällt. Ein solcher Strahl berührt auch den vom Strahlenbüschel 2. Grads von $\Sigma$ umhüllten Kegelschnitt $k^2$. Die beiden Punkte R sind Brennpunkte von 2 Strahlen des Strahlenbüschels 2. Grads, und liegen auf dem Kegelschnitt

$R^2$, nach welchem $\tau_1$ die Brennfläche berührt. Die $OT_1$ berührt den $k^2$ in dem von O verschiedenen Schnittpunkt mit $R^3$ und schneidet den $R^2$ in O und im Punkte, wo sie die $K^6$ berührt. Analoges gilt für $O' T_1$. Man erkennt leicht, dass sich $k^2$ und $R^2$ in 2 Punkten berühren.

Der vollständige Durchschnitt von $\tau_1$ mit der Brennfläche $\Phi$ zerfällt also in eine Kurve 6. Ordnung und zwei Kegelschnitte; nach dem einen derselben berührt $\Phi$ die Ebene $\tau_1$.

Schnittpunkte von $C^6$ und $R^2$ gibt es zweierlei: Entweder berührt eine Gerade durch $T_2$ in E eine $C^3$ und schneidet sie ausserdem noch in einem Punkt von $OT_1$, welcher Fall einem Schnittpunkt von $C^6$ und $R^2$ entspricht, der als Doppelpunkt von $\Phi$ aufzufassen ist, oder es berührt eine $C^3$ eine durch $T_2$ gehende Gerade in einem Punkte von $T_1 O$, welcher Fall einem Schnittpunkt von $C^6$ und $R^2$ entspricht, der als Punkt der Rückkehrkurve von $\Phi$ aufzufassen ist.

Untersuchen wir nun zunächst die Anzahl der Schnittpunkte von $C^6$ und $R^2$ erster Art. Eine Tangente von $T_2$ an irgend eine $C^3$ schneidet dieselbe noch in einem Punkt L. Die Punkte L liegen auf einer Kurve 8. Ordnung, *) die aber in die doppelt zu zählende Gerade m und eine Kurve 6. Ordnung $R^6$ zerfällt. $R^6$ hat die Punkte $T_2$ und $A_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) zu Doppelpunkten und schneidet ausser O noch 4 Punkte L auf $O T_1$ aus. Es sind also 4 Schnittpunkte von $C^6$ und $R^2$ Doppelpunkte von $\Phi$. In diesen berührt die Ebene $\tau_1$ die Doppelkurve $\Phi$.

Wir kommen nun zu den Schnittpunkten von $C^6$ und $R^2$ zweiter Art. Die Berührpunkte der Tangenten von $T_2$ aus an die Kurven $C^3$ liegen auf einer Kurve 5. Ordnung, *) die aber in die Gerade m und einer Kurve 4. Ordnung $R^4$ zerfällt. $R^4$ hat O zum Doppelpunkt und berührt die Geraden $T_2 A_i$ in $A_i$. Es gibt also 2 Kurven des Büschels $C^3$, welche von durch $T_2$ gehenden Geraden in einem Punkt von $T_1 O$ berührt werden, und folglich gibt es 2 Schnittpunkte von $C^6$ und $R^2$, welche der Rückkehrkurve von $\Phi$ angehören. In diesen beiden Punkten berühren sich $C^6$ und $R^2$.

---

*) Vergl. Clebsch-Lindemann pag. 414.

Die Punkte O und O′ sind Doppelpunkte von $C^6$. Ausser in O schneidet die $O T_1$ die $C^6$ in den 4 Punkten, wo sie die $K^6$ in E schneidet (ihren Berührpunkt mit $K^6$ nicht mitgerechnet). Analoges gilt für $O' T_1$. Die Gerade O O′ schneidet die $C^6$ ausser in den Doppelpunkten O und O′ noch in den beiden Punkten, wo der dem $k^2$ analoge Kegelschnitt der Ebene $\tau_2$ die O O′ schneidet.

Der Kegelschnitt $k^2$ schneidet die $C^6$ in 12 Punkten; diese gehören ebenfalls der Doppelkurve von $\Phi$ an.

Hat eine Kurve $C^3$ des Büschels einen Doppelpunkt, so gehen von $T_2$ nur mehr 4 Tangenten an diese Kurve. Die entsprechende Gerade hat 4 Schnittpunkte mit $C^6$, und berührt überdies die $C^6$. Die Anzahl der Doppelpunkte, die in einem Büschel von Kurven 3. Ordnung auftreten können, ist 12; in unserem Fall, wo sich die Kurven sämmtlich in O berühren, zählt dieser Punkt für 2 Doppelpunkte, (vergl. Cremona, Einleitung in die Theorie der algebr. Kurven), ferner liefern die Schnittpunkte des Kegelschnitts der singulären Punkte mit m zwei derselben, so dass ausser diesen noch 8 Kurven mit Doppelpunkt auftreten. Die $C^6$ ist also von der 8. Klasse.

Geht durch $T_2$ an eine Kurve $C^3$ des Büschels eine Wendetangente, so trifft die entprechende Gerade durch $T_1$ in $\tau_1$ die $C^6$ in einem Rückkehrpunkt. Diese Wendetangenten sind zugleich auch Tangenten an $R^4$. Nun ist $R^4$ vom Geschlechte 2; folglich von der 10. Klasse. Ausser den 4 Geraden $T_2 A_i$ gehen noch 6 Tangenten von $T_2$ an $R^4$, die zugleich auch Wendetangenten von $C^3$ sind. Die Kurve $C^6$ hat demnach 6 Rückkehrpunkte.

$R^4$ und $C^6$ sind eindeutig auf einander bezogen, und folglich ist $C^6$ ebenfalls vom Geschlecht 2. Die für Ordnung, Klasse, Geschlecht, Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte von $C^6$ gefundenen Zahlen stehen mit den Plücker'schen Formeln im Einklang.

Die Rückkehrkurve von $\Phi$ oskuliert die Ebene $\tau_1$ in den 2 Berührpunkten von $k^2$ und $R^2$, ebenso in den 2 Berührpunkten von $R^2$ und $C^6$ und geht durch die 6 Rückkehrpunkte von $C^6$. Ferner hat

sie die Punkte O und O′, wie wir später (§ 10) zeigen werden, zu dreifachen Punkten.

Die Doppelkurve von $\Phi$ berührt die Ebene $\tau_1$ in 4 Schnittpunkten von $C^6$ und $R^2$ und geht durch die 12 Schnittpunkte an $C^6$ und $k^2$. *)

Analoge Resultate gelten natürlich für die Ebene $\tau_2$.

§ 9.

## Büschel stationärer Tangentialebenen der Brennfläche. Klasse der Schnittkurve der Brennfläche mit einer allgemeinen Ebene.

Legen wir durch einen Punkt P des Raumes irgend eine Ebene $\varepsilon$. Die Strahlen von $\Sigma$, welche irgend eine durch P gehende Gerade g von $\varepsilon$ schneiden, bilden eine Regelfläche 8. Grads. Der Schnitt derselben mit E sind 4 Gerade des Strahlenbüschels 4. Ordnung von $\Sigma$ in E, sowie eine Kurve $k^4$ 4. Ordnung. $k^4$ hat O zum Doppelpunkt, die 4 Punkte $A_i$ zu einfachen Punkten und geht durch die 5 Punkte, wo die durch P gehenden Strahlen von $\Sigma$ die E treffen, ebenso durch die 3 Punkte, wo die in $\varepsilon$ liegenden Strahlen von $\Sigma$ die E treffen. Die Kurven 4. Ordnung $k^4$, welche von den Regelflächen 8. Grads, die die Geraden des Strahlenbüschels P in $\varepsilon$ zu Leitlinien haben, als Partialkurven auf E ausgeschnitten werden, bilden demnach einen Büschel von Kurven 4. Ordnung, die sämmtlich den Punkt O zum Doppelpunkt haben und durch die weiteren 12 genannten Punkte gehen.

*) In neuester Zeit hat Herr Dr. R. Schumacher eine äusserst geistreiche Methode angegeben, die es ermöglicht, den Grad der Doppel- und Rückkehrkurve aus den auf das Strahlensystem bezüglichen Zahlen (Ordnung, Klasse und Modul) abzuleiten. Zu dem Zweck bildet er nämlich mit Zuhilfenahme des vierdimensionalen Raums das Strahlensystem auf eine Fläche $(n + k)$ ten Grads mit einer Doppelkurve $\left[\frac{n\,(n-1)}{2} + \frac{k\,(k-1)}{2} + \varrho\right]$ ten Grads ab, wo unter n, k und $\varrho$ die diesbezügliche Zahlen für Ordnung, Klasse und Modul des Strahlensystems zu verstehen sind.

Die Strahlen g des Strahlenbüschels P in $\varepsilon$ liegen zu ihren entsprechenden Kurven $k^4$ perspektivisch, insoferne nämlich jede g ihre $k^4$ schneidet. Legen wir durch eine g eine Ebene r, so schneidet diese die entsprechende $k^4$ ausser im Schnittpunkt L von g mit E noch in 3 Punkten, und dies sind die Schnittpunkte der 3 in r liegenden Strahlen von $\Sigma$ mit E. Von L aus gehen noch 8 Tangenten an $k^4$, welche Zahl der Klasse der Brennfläche entspricht.

Der Grad des durch P an die Brennfläche gehenden Tangentialkegels wird in folgender Weise erhalten: So oft eine Kurve $k^4$ des Büschels ausser O noch einen Doppelpunkt hat, ist ihre Klasse um 2 niedriger, und folglich gehen durch den entsprechenden Strahl g nur 6 Tangentialebenen. Dieser Strahl ist also Tangente an $\Phi$. Kurven $k^4$ dieser Art gibt es 20 im Büschel $k^4$ *). Der Grad des durch P gehenden Tangentialkegels und folglich auch die Klasse der Schnittkurve der Ebene $\varepsilon$ mit $\Phi$ ist 20.

Da der Kegel von P an $\Phi$ vom 20. Grad und von der 8. Klasse ist, und da infolge der Klassenzahl von $\Sigma$ $\Phi$ keinen Büschel von Doppeltangentialebenen enthalten kann, so gibt es gemäss den Plücker'schen Formeln durch P 12 stationäre Tangentialebenen an die Brennfläche $\Phi$. Der Büschel der stationären Ebenen von $\Sigma$ ist also vom 12. Grad.

Einer Geraden g von E entspricht in der Verwandtschaft eine Kurve 3. Ordnung mit 3 Wendetangenten in E'. Diesen als Geraden von E' entsprechen bezw. 3 Kurven 3. Ordnung in E, für welche g Wendetangente ist. Eine beliebige Gerade von E oder E' ist also Inflexionstangente an 3 Kurven 3. Ordnung. Da dies auch für die Gerade m (Durchschnitt von E und E') gilt, so folgt, dass E und E' 3fache Ebenen des Büschels stationärer Ebenen sind.

---

*) Dies kann etwa durch die Methode der Charakteristiken dargethan werden. Vergl. Clebsch-Lindemann Seite 408 u. ff.

§ 10.

## Erzeugung von $\Sigma$ durch verwandte Ebenenbündel O und O′*).

Ebenso wie durch die eindeutig auf einander bezogenen Ebenen E und E′ kann $\Sigma$ auch durch 2 eindeutig auf einander bezogene Ebenenbündel O und O′ erzeugt werden. Wie die erstere Erzeugungsweise darauf beruht, dass durch einen Punkt von E oder E′ ausser den 4 in E resp. E′ gelegenen Strahlen nur mehr ein Strahl geht, so beruht die letztere darauf, dass in einer Ebene durch O oder O′ ausser den beiden aus dem Strahlenkegel 2. Grads O resp. O′ ausgeschnittenen Strahlen nur mehr ein Strahl von $\Sigma$ liegt. Wir nennen also 2 Ebenen von O und O′ entsprechend, welche einen und denselben Strahl von $\Sigma$ projicieren. Sei P irgend ein Punkt des Raums, dann entsprechen den Ebenen des Ebenenbüschels OP im Bündel O′ die Tangentialebenen einer Kegelfläche.

Durch P gehen 5 Strahlen von $\Sigma$; die Ebenen durch O′, welche diese 5 Strahlen projicieren, sind die durch P gehenden Tangentialebenen der Kegelfläche. Dieselbe ist also von der 5. Klasse.

Die Axe OP schneidet die E′ in einem Punkt, durch welchen 4 Strahlen von $\Sigma$, in E′ liegend, gehen. E′ ist also 4fache Tangentialebene an jede Kegelfläche 5. Klasse, und folglich sind die Kegelflächen von der 8. Ordnung.

Jeder Ebene des besonderen Ebenenbüschels $OA_i$ entspricht in O′ immer ein und dieselbe Ebene $O' A_i A'_i$. Der Ebene $OA_i A_i'$ entspricht jede Ebene des Ebenenbüschels $O' A'_i$.

Der Ebene E von O entsprechen in O′ die Ebenen einer Kegelfläche 4. Klasse K′. Der Geraden $OA_i$ entspricht also diese Kegelfläche 4. Klasse und der Ebenenbüschel $O' A'_i$. Man sieht hieraus, dass alle Kegelflächen 5. Klasse die Ebenen $O' A_i A'_i$ (i = 1, 2, 3, 4) berühren. Da die Geraden $OT_1$

*) Da O und E einerseits und O′ und E′ andererseits dieselbe Rolle spielen, so mögen die folgenden Entwicklungen nur für einen Punkt resp. eine Ebene gemacht und als auch für den anderen Punkt resp. andere Ebene giltig angesehen werden.

und $OT_2$ ebenfalls jede g schneiden, so folgt, dass auch $\tau_1$ und $\tau_2$ die Kegelflächen 5. Klasse berühren.

Den Ebenen durch irgend eine Gerade $\alpha$ durch O in E entsprechen die Ebenen des Büschel $\alpha'$ ($\alpha$ und $\alpha'$ entsprechen sich in den projektivischen Strahlenbüscheln O und O'). Die beiden Ebenenbüschel sind projektivisch und erzeugen eine $F^2$. Der der Geraden $\alpha$ entsprechende Kegel zerfällt hier also in einen Ebenenbüschel $\alpha'$ und die obengenannte Kegelfläche 4. Klasse K'.

Der Kegel 5. Klasse von O', welcher dem Ebenenbüschel OO' als dem Punkt O angehörig entspricht, zerfällt in die Ebenenbüschel $O'T_1$ und $O'T_2$ sowie in eine Kegelfläche 3. Klasse $K'^3$, die auch $\tau_1$ und $\tau_2$ berührt. Diese beiden Ebenen entsprechen sich in beiden Bündeln selbst. $K'^3$ ist Tangentialkegel in O' an $\Phi$. Die Ebenen von $K'^3$ berühren $\Phi$ in O'. Der Strahlenkegel 2. Grads von $\Sigma$ durch O' und der doppelt zu zählende Kegel 3. Klasse $K'^3$ bilden den Gesammtkegel 8. Klasse, der von O' an die Brennfläche $\Phi$ geht.

Die Ebenen eines Ebenenbüschels O P von O erzeugen mit den Ebenen ihres entsprechenden Kegels O' eine Regelfläche 6. Klasse $R_6'$. Diese in Verbindung mit dem Strahlenkegel 2. Grads, durch O ist die Regelfläche 8. Grads, welche die die Gerade O P schneidenden Strahlen von $\Sigma$ bilden.

Für den speziellen Ebenenbüschel O O' zerfällt diese Regelfläche 6. Grads in die doppelt zu zählenden Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$ und den Strahlenkegel 2. Ordnung O'. (Dieser leztere ist das Erzeugnis des Ebenenbüschels O O' mit dem Kegel $K'^3$. Das vollständige Erzeugnis 4. Grads zerfällt in die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$, sowie den genannten Strahlenkegel 2. Grads.)

Die eine Brennebene eines Strahls des Strahlenkegels 2. Ordnung O' ist die Tangentialebene dieses Kegels längs des Strahls, die andere ist die Tangentialebene des Kegels 3. Klasse, die sich mit ihrer entsprechenden Ebene durch O O' im Strahl schneidet. Der eine Brennpunkt der Strahlen des Strahlenkegels 2. Ordnung O' ist immer der Punkt O', der Ort des 2. Brennpunkts ist eine Raumkurve 5. Ordnung, von welcher O' 3-facher Punkt ist.

Der Strahlenkegel 2. Grads durch O′ und die Kegelfläche $K'^3$ berühren sich längs dreier Kanten. Dies wird aus Folgendem klar: Die genannten Kegelflächen haben 6 gemeinschaftliche Tangentialebenen. Sei $\varepsilon$ eine derselben und $l_1$, $l_2$ ihre Berührkanten mit dem Strahlenkegel 2. Ordnung bezw. $K'^3$, dann ist $l_1$ die Schnittlinie von $\varepsilon$ mit ihrer entsprechenden Ebene im Büschel O O′ (da $\varepsilon$ sonst den Strahlenkegel 2. Ordnung nach keiner Kante mehr schneiden kann) und folglich fallen für den Strahl $l_1$ die beiden Brennebenen in $\varepsilon$ zusammen Die der $l_1$ unendlich benachbarte Kante des Strahlenkegels 2. Ordnung wird von einer der $\varepsilon$ unendlich benachbarten Tangentialebenen $\varepsilon'$ von $K'^3$ mit ihrer entsprechenden Ebene im Büschel O O′ ausgeschnitten. $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ sind als ein und dieselbe Tangentialebene anzusehen. Durch $l_1$ gehen also 2 unendlich benachbarte Tangentinalebenen von $K'^3$, woraus sofort folgt. dass $l_1$ und $l_2$ identisch sind. Die 6 gemeinschaftlichen Tangentialebenen der beiden Kegelflächen fallen also paarweisse zusammen, und in jeder dieser 3 Ebenen fallen 3 unendlich benachbarte Ebenen des Büschels stätionärer Ebenen zusammen. Für die Strahlen, längs welcher sich die beiden Kegel berühren, fallen die beiden Brennpunkte in den Punkt O′. Die Ebene E′ ist Doppeltangentialebene von $K'^3$; $K'^3$ ist deshalb von der 4. Ordnung. Die Schnittkurve irgend einer Ebene durch O′ mit $\Phi$ hat also in O′ einen 4fachen Punkt.*) $K'^3$ hat 3 Rückkehrkanten. Die Kegelfläche 5. Klasse, durch O, welche den Ebenen der Ebenenbüschel durch O′ entsprechen, welche genannte 3 Rückkehrkanten zu Axen haben, haben O O′ ebenfalls zur Rückkehrkante. Daraus folgt, dass O′ dreifacher Punkt der Rückkehrkurve von $\Phi$ ist. Ebenso natürlich O. (Vergl. § 9 a. E.).

Eine beliebige Gerade g werde mit O und O′ durch eine Ebene $\alpha$ resp. $\beta'$ verbunden. Den Geraden von $\alpha$ durch O als Axen von Ebenenbüscheln entsprechen die Kegelflächen

---

*) Die Punkte $A_i$ und $A_i'$ sind ebenfalls Knotenpunkte von $\Phi$. In ihnen berührt ein Kegel 2. Grads die Brennfläche $\Phi$. Ebenso sind die Ebenen O $A_i$ $A_i'$ und O′ $A_i$ $A_i'$ Ebenen, welche $\Phi$ nach einem Kegelschnitt berühren, der durch O, $A_i$ $A_i'$ resp. O′ $A_i$ $A_i'$ geht. —

5. Klasse einer Schaar von solchen Kegelflächen durch O′. Lassen wir nun einer Geraden $\lambda$ in $\alpha$ durch O die 8 Geraden entsprechen, die von $\beta'$ aus der $\lambda$ entsprechenden Kegelfläche, ausgeschnitten werden. Eine Gerade in $\beta'$ durch O′ wird von 8 Kegelflächen, 5. Klasse ausgeschnitten. Also entsprechen einer Geraden durch O′ in $\beta'$ 8 Gerade durch O in $\alpha$. Es kommt also 16 mal vor, dass entsprechende Strahlen von $\alpha$ und $\beta'$ in einer Ebene liegen. Sei L der Punkt auf g, den eine solche Ebene auf g ausschneidet, so gehen, da L auf der Kegelfläche selbst liegt, 2 zusammenfallende Tangentialebenen an dieselbe. Diesen entspricht eine Ebene durch $\lambda$, und im Schnitt der entsprechenden Ebenen fallen 2 der durch L gehenden 5 Strahlen von $\Sigma$ zusammen. L liegt also auf der Brennfläche. Nun aber zerfällt die der $(\alpha\ \tau_1)$ entsprechende Kegelfläche 5. Klasse in den Ebenenbüschel $T_1$ O′ und eine Kegelfläche 4. Klasse (und 6. Ordnung.) In der Schnittlinie von $\alpha$ mit $\tau_1$ sind 2 Strahlen vertreten, die mit ihren entsprchenden im Büschel O′ von $\beta'$ zusammenfallen. Ebenso verhält es sich mit der Schnittlinie von $\alpha$ und der Ebene $\tau_2$.

Die Brennfläche ist deshalb von der 12. Ordnung.

Die Kegelfläche 5. Klasse durch O′ berühren die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$ nach denselben Kanten, nämlich nach denjenigen, welche die Berührpunkte von $OT_1$ und $OT_2$ mit $K^6$ mit O′ verbinden. Dies soll in Folgendem bewiesen werden:

Den Ebenen des Ebenenbüschels g (Gerade durch O) entsprechen die Tangentialebenen eines Kegels 5. Klasse $K'^5$ mit der Spitze O′. Durch eine beliebige Gerade g′ durch O′ gehen an $K'^5$ 5 Tangentialebenen. In jeder derselben liegt ein Strahl von $\Sigma$, der g schneidet und der zu der Regelfläche $R'_6$ von $\Sigma$ gehört, deren Leitlinie g′ ist. Die Schnittpunkte dieser 5 Strahlen sowie der Punkt O sind die 6 Schnittpunkte von g mit $R'_6$.

Liegt nun g′ in $\tau_1$, so zerfällt $R'_6$ in die doppelt zu zählende Ebene $\tau_1$ und eine $R'_4$. Von dieser liegt ein Strahl s in $\tau_1$; dieser schneidet die g′ im Schnittpunkt mit $R^2$ (vergl. § 8). Ausser $\tau_1$ gehen durch g′ noch 4 Tangentialebenen an $K'^5$. In jeder derselben liegt ein die g schneidender Strahl

und die 4 Schnittpunkte derselben mit g sind die Schnittpunkte von $R'^4$ mit g. Im Allgemeinen fällt keiner in den Punkt O.

Ist nun insbesondere g′ die Kante, längs welcher $\tau_1$ die $K'^5$ berührt, so gehen durch g′ ausser $\tau_1$ nur noch 3 Tangentialebenen an $K'^5$. Es fallen also 2 von den durch g′ gehenden Tangentialebenen mit $\tau_1$ zusammen, und folglich fällt einer von den 4 Schnittpunkten der g mit $R'_4$ nach O. Der Strahl s von $R'_4$, welcher in $\tau_1$ liegt, schneidet demnach die g in O, woraus folgt, dass dieser Strahl nur der Strahl $O T_1$ sein kann. g′ kann also nur die Verbindungslinie von O′ mit einem der beiden Punkte sein, in denen $OT_1$ den $R^2$ trifft*). Nun kann O O′ die Berührkante von $\tau_1$ mit $K'_5$ deshalb nicht sein, weil durch O O′ 5 verschiedene Tangentialebenen von $K'^5$ nachgewiesen werden können: nämlich die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$; ferner gehen durch g 3 Ebenen an die Kegelfläche $K^3$ (3. Klasse und 4. Ordnung), die in O die $\Phi$ berührt; die diesen 3 Ebenen entsprechenden Ebenen durch O O′ sind die 3 übrigen Tangentialebenen durch O O′ an $K'^5$.

g′ kann also nur die Verbindungslinie von O′ mit demjenigen Punkte sein, in dem $OT_1$ den $R^2$ ausser O noch trifft. Dies ist aber der Berührpunkt von $K^6$ mit $O T_1$ (vergl. § 8).

Damit haben wir die sämmtlichen gemeinschaftlichen Tangentialebenen aller $K'^5$ gefunden: Sie haben E′ zur 4-fachen Tangentialebene, die 4 Ebenen O′ $A_i$ $A_i'$ (i = 1, 2, 3, 4.) zu einfachen und berühren die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$ nach denselben Kanten. Diese Ebenen vertreten 4. 4 + 4 + 2 + 2 = 24 gemeinschaftliche Tangentialebenen.

§. 11.

## Grad und Klasse des zur Brennfläche $\Phi$ gehörigen vollständigen Strahlensystems.

Die Regelflächen 8. Grads von $\Sigma$, deren Leitgeraden Strahlen eines Strahlenbündels P sind, schneiden auf der Ebene

*) Vergl. § 8.

E ausser 4 Strahlen von $\Sigma$ noch Kurven 4. Ordnung aus. Dieselben haben alle den Punkt O zum Doppelpunkt, gehen durch die 4 Punkte $A_i$, sowie durch die 5 Punkte p, in denen die durch P gehenden 5 Strahlen die E treffen. *)

Soll nun ein Strahl des Bündels P Doppeltangente von $\Phi$ sein, so muss die entsprechende Kurve 4. Ordnung ausser O noch 2 Doppelpunkte haben. Eine Kurve 4. Ordnung dieser Art sind die 2 Kegelschnitte durch O, $A_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ und durch die 5 Punkte p. (Dieser letztere Kegelschnitt enthält auch den Punkt O). Die Leitgerade der Regelfläche, welche diese spezielle Kurve 4. Ordnung ausschneidet, ist die Gerade P O′, **) und da die Kurve 4. Ordnung sogar 3 Doppelpunkte ausser O hat, so ist P O′ als 3-fache Tangente an $\Phi$ zu zählen. Vom vollständigen Strahlensystem, das zur Brennfläche $\Phi$ gehört, trennen sich also die Bündel O und O′ als je dreifach zu zählende Strahlensysteme 1. Ordnung und 0ter Klasse ab. Die 6 Punkte O und p, sowie 3 der Punkte $A_i$ liegen auf einer Kurve 3. Ordnung. ***) Die Verbindungslinie von O mit dem 4. noch nicht verwendeten Hauptpunkte $A_k$, in Verbindung mit genannter Kurve 3. Ordnung, liefert eine Kurve 4. Ordnung der besagten Art. Diese wird von einer Regelfläche ausgeschnitten, deren Leitgerade P $A'_k$ ist. Daraus folgt, dass sich vom vollständigen Strahlensystem auch die 8 Strahlenbündel $A_i$ und $A_i'$ abtrennen Die 5 Punkte O und $A^i$, sowie 4 der Punkte p liegen auf einer Kurve 3. Ordnung; diese in Verbindung mit der Geraden durch O nach dem 5. nicht verwendeten Punkt p gibt ebenfalls eine Kurve 4. Ordnung der besagten Art. Das hiedurch bedingte Strahlensystem ist nichts anderes als das Strahlensystem S (vergl. § 6).

Im nächten Paragraph wird sich sehr einfach ergeben, dass der Grad des Gesammtstrahlensystems der Doppeltangenten von $\Phi$ 114 ist, und dass das Strahlensystem der Haupttangenten vom 48. Grad ist. Vom vollständigen Strahlensystem trennen sich, wie gezeigt, verschiedene Strahlenstysteme

*) Vergl. § 9.

**) Vergl. Reye, Geometrie der Lage. 2. Abt. pag. 139.

***) Vergl. § 4.

niederen Grads ab. Da die Schnittkurve einer beliebigen Ebene mit $\Phi$ von der 20. Klasse ist (siehe § 9), die Rückkehrkurve von $\Phi$ vom 24. Grad und die Doppelkurve von $\Phi$ vom 20. Grad ist (diese letzteren beiden Behauptungen sind speziell an den Ebenen E und E′, sowie $\tau_1$ und $\tau_2$ nachgewiesen worden [siehe §§ 7 und 8]), so ergibt sich mittelst der Plücker'schen Formeln als die Klasse des Strahlensystems der Doppeltangenten von $\Phi$ die Zahl 112 und als die Klasse des Strahlensystems der Haupttangenten von $\Phi$ die Zahl 48. Vom vollständigen Strahlensystem der Doppeltangenten trennen sich jedoch (ausser $\Sigma$ und S) insbesondere noch die Ebenen E und E′ als je 3-fach zählende Strahlensysteme 0 ter Ordnung und 1. Klasse, ferner die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$, sowie die 8 Ebenen $O\,A_i\,A'_i$, $O'\,A_i\,A^{i'}$ als Strahlensysteme 0ter Ordnung und 1. Klasse ab.

## § 12.

# Specielle Fälle.

### I.

### Strahlensystem $\Sigma$ 3. Ordnung und 3. Klasse.

Von besonderem Interesse ist der Fall der Verwandtschaft, in welchem die der Schnittlinie m von E und E′ entsprechenden Kurven 3. Ordnung in E und E′ durch 2 sich selbst entsprechende Punkte von m geht. Die Ebenen durch diese Punkte und O O′ sind offenbar die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$. Die Punktreihen auf $O\,T_1$ und $O'\,T_1$ einerseits und $O\,T_2$ und $O'\,T_2$ andererseits liegen also perspektivisch, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden sich in $L_1$ resp. $L_2$. Durch $T_1$ und $T_2$ gehen Strahlenbüschel 1. Grads von $\Sigma$. Das Strahlensystem $\Sigma$ wird jetzt von der 3. Ordnung (indem sich die beiden Strahlenbündel $T_1$ und $T_2$ vom Strahlensystem 5. Ordnung abtrennen) und von der 3. Klasse und hat 10 singuläre Punkte und Ebenen mit Strahlenbüscheln 1. Grads. Die Ebenen E und E′ berühren die Brennfläche $\Phi$ wieder nach den der m entsprechenden Kurven 3. Ordnung und schneiden noch eine Kurve 2. Ordnung aus, die von den Verbindungslinien

der Punkte von m mit ihren entsprechenden umhüllt wird Die Kurve 2. Ordnung und die eben genannte Kurve 3. Ordnung berühren sich in 3 Punkten; in diesen oskuliert die Rückkehrkurve von $\Phi$ die E resp. E'.

Da $\Sigma$ sich selbst reciprok ist, so ist $\Phi$ von der 8. Klasse und 8. Ordnung, ferner ist der Grad der Rückkehrkurve und des Büschels der stationären Ebenen von $\Phi$ derselbe, nämlich gleich 12. Doppelkurve und Büschel von Doppelebenen sind nicht vorhanden. O und O' sind 3-fache Punkte der Rückkehrkurve u. s. w. u. s. w.

Vermöge der Plücker'schen Formeln ergibt sich die Klasse der Schnittkurve einer Ebene mit $\Phi$ als 20; ferner die Anzahl der Wendetangenten als 48, die Anzahl der Doppeltangenten als 114. Die Klasse des Strahlensystems der Doppeltangenten von $\Phi$ ist also die 114., die Klasse des Strahlensystems der Haupttangenten die 48., und wegen der Reciprocität von $\Sigma$ sind dies zugleich auch die Zahlen für den Grad der betreffenden Strahlensysteme.

Zur direkten Aufsuchung des Grades des Tangentialkegels von einem Punkt P an $\Phi$ (der Klasse der Schnittkurve einer Ebene $\varepsilon$ mit $\Phi$), des Grades des Strahlensystems der Doppeltangenten von $\Phi$ u. s. w. könnten wir aber auch, wie im allgemeinen Fall, die Schnittkurven 4. Grads betrachten, welche die Regelflächen (hier 6. Grads) ausser den beiden Strahlen von $\Sigma$ auf E ausschneiden, deren Leitlinien Strahlen des Strahlenbüschels resp. Strahlenbündels P sind. (Vergl. §§ 9 und 11). Wir hätten hier ebenso wie im allgemeinen Fall die Anzahl der Kurven des Büschels, die ausser O noch einen Doppelpunkt haben, resp. die Anzahl der Kurven des Netzes, die ausser O noch 2 Doppelpunkte haben, zu ermitteln. Nun aber sind im allgemeinen Falle die Umstände, unter welchen die Frage zu lösen wäre, genau dieselben wie hier in dem speziellen Falle des sich selbst reciproken Strahlensystems $\Sigma$. Es ist also Klasse der Schnittkurve, Ordnung des Strahlensystems der Doppeltangenten von $\Phi$ u. s. w. im allgemeinen wie hier im besonderen Falle die nämliche.

## II.

### Strahlensystem $\Sigma$ 2. Ordnung und 3. Klasse.

Als weiteren Spezialfall wollen wir den betrachten, in welchem die projektivischen Strahlenbüschel O und O′ perspektivisch liegen, d. h. in welchem entsprechende Strahlen der beiden Büschel sich schneiden*). Alle Strahlen von $\Sigma$ schneiden hier die O O′. Diese Gerade ist demnach eine Brennlinie von $\Sigma$. Jede Ebene durch OO′ schneidet aus der Brennfläche $\Phi$ ausser O O′ noch einen Kegelschnitt aus, der von Strahlen von $\Sigma$ umhüllt wird. Die Ebenen E und E′ berühren $\Phi$ nach den der m entsprechenden Kurven 3. Ordnung. Die Brennfläche $\Phi$ ist vom 6. Grad und hat O O′ zur 4 fachen Geraden. Das Strahlensystem $\Sigma$ ist von der 2. Ordnung, indem sich vom vollständigen Strahlensystem 3 Strahlenbündel absondern. Man erhält die durch einen Punkt P gehenden Strahlen als Tangenten des in der Ebene durch P und und O O′ liegenden Schnittkegelschnitts mit $\Phi$. Durch jeden Punkt von O O′ geht ein Kegel 3. Klasse von Strahlen von $\Sigma$. Die Geraden $A_i$ $A_i'$ liegen auf $\Phi$ und längs ihnen wird $\Phi$ von den Ebenen OO′ $A_i$ $A_i'$ berührt.

Nun bilden alle geraden Linien, die durch eine (n-2)fache Gerade einer Fläche nten Grads gehen und diese Fläche berühren, ein Strahlensystem 2. Ordnung und $(2n-2)$ ter Klasse (Siehe Kummer, über die algebraischen Strahlensysteme [Abhandlung der Berliner Akademie, math. Klasse, 1866]). Alle Geraden durch OO′, die $\Phi$ berühren, bilden also ein Strahlensystem 2. Ordnung und 10. Klasse. Dieses Strahlensystem zerfällt aber in mehrere Strahlensysteme niederer Klasse. Es sondern sich nämlich erstens die 4 Ebenen OO′ $A_i$ $A_i'$ als Strahlensysteme 0ter Ordnung und 1. Klasse ab. Ferner sondern sich die 3 Ebenen als Strahlensysteme 1. Klasse und 0ter Ordnung ab, welche die Gerade OO′ mit den Punkten verbinden, in denen m von ihren entsprechenden Kurven 3. Ordnung geschnitten wird. Eine solche Ebene enthält

*) Die 3 Schnittpunkte der der m entsprechenden Kurven mit m entsprechen sich in der Verwandtschaft selbst.

nämlich ausser O O′ nur noch die Gerade, die einen der besagten Punkte von m mit dem Mittelpunkt des in ihr liegenden Strahlenbüschels von $\Sigma$ verbindet, als Schnittlinie mit $\Phi$. Längs dieser Verbindungslinie berührt eine solche Ebene die $\Phi$. Das Reststrahlensytem ist unser Strahlenstystem 2. Ordnung und 3. Klasse.

## III.

### Strahlensystem $\Sigma$ 1. Ordnung und 2. Klasse.

Betrachten wir endlich noch den Fall, wo die Ebenen E und E′ die Punkte ihrer Schnittlinie m in der Verwandtschaft entsprechend gemein haben, so liegt in jeder Ebene durch O O′ ein Strahlenbüschel 1. Ordnung von $\Sigma$. Durch einen Punkt P des Raumes geht deshalb nur ein Strahl von $\Sigma$. Irgend eine Ebene $\varepsilon$ schneidet aus E eine Gerade aus und trifft deren entsprechende Kurve 3 Ordnung ausser im Schnittpunkt mit m nur mehr in 2 Punkten. Das Strahlensystem $\Sigma$ ist also von der 1. Ordnung und 2. Klasse. m kann nur die Verbindungslinie von 2 singulären Punkten sein, etwa von $A_1$ und $A_2$, sowie von $A'_3$ und $A'_4$. Die Verbindungslinien von $A_3$ und $A_4$, sowie von $A'_1$ und $A'_2$ müssen sich auf m schneiden. Die Brennfläche von $\Sigma$ artet hier in 2 Brennlinien aus, nämlich in die Gerade O O′ und einen dieselbe schneidenden in der Ebene $A_3 A_4 A_1' A_2'$ liegenden Kegelschnitt, der durch die Punkte $A_3, A_4, A_1', A'_2$ geht. (Vergl. Reye, Geometrie der Lage, 2. Abt. pag. 84 und f. f.)

Wir haben also zugleich den Satz:

Ein Strahlensystem 1. Ordnung und 2. Klasse wird von 2 beliebigen Ebenen in cubisch verwandten ebenen Punktsystemen geschnitten.